

工学基礎実験実習レポート

ニュートン法

出題日: 20xx 年 x 月 xx 日

提出日: 20xx 年 x 月 xx 日

締切日: 20xx 年 x 月 xx 日

次の 3 つの問題のうち、課題 1, 2 を解いてレポートを提出せよ。余裕のある学生は、発展課題についても試みよ。

課題 1

次の方程式の解をニュートン法を用いて求めよ。解くべき方程式を $f(x) = 0$, その解を $x = a$ (各自机上で求める), 解 a の k 番目の近似値を x_k としたとき, 収束の様子を調べるために $k, x_k, f(x_k)$ を表示せよ。また, 収束の速さを調べよ。すなわち, プログラムを実行することにより, k と $|x_k - a|$ の関係を調べよ。 k と $|x_k - a|$ の関係はグラフ等を用いてわかりやすく示せ。(グラフをプログラムで書く必要はない。) 余裕があれば, 理論的に解析し, 収束の判定条件についても考察せよ。

(a) $\sin e^x = 0$

(b) $x^3 - 3x - 2 = 0$

(c) 適当な方程式 (サンプルファイルの $f(x) = x(x+1)(x-1) = 0$ 以外で)

解法 1. ニュートン法

解 a の第 k 番目の近似値を x_k とする。このとき, x_k をもとにした第 $k+1$ 番目の近似値 x_{k+1} は, 以下の式で求められる。初期値 x_0 は, 解 a の近くで適当に設定する。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1)$$

課題 2

方程式 $x^3 - 2x - 5 = 0$ の実数解を初期値 $x_0 = 0$ として, ニュートン法で求めよ。このとき, 収束の様子を調べるため, $k, x_k, f(x_k)$, および $f'(x_k)$ の値を表示せよ。

発展課題

方程式 $f(x) = 0$ が重解 $x = a$ を持つ場合, ニュートン法は (1) 式のままでは適用できなくなる。この理由を調べてみよう。そこで,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2 f''(x)}{2} = 0$$

とにおいて, h について解くと,

$$h = \frac{-f'(x) \pm \sqrt{D}}{f''(x)}$$
$$D = (f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)$$

となる. 従って, 解 a の第 k 番目の近似値 x_k から第 $k+1$ 番目の近似値 x_{k+1} を求めるには, 以下のようにする.

$$D > 0 \text{ かつ } f'(x_k) \geq 0 \text{ のとき } x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) + \sqrt{D}} \quad (2)$$

$$D > 0 \text{ かつ } f'(x_k) < 0 \text{ のとき } x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{f'(x_k) - \sqrt{D}} \quad (3)$$

$$D \leq 0 \text{ のとき } x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (4)$$

このとき, (2)~(4) 式で決まる x_{k+1} と x_k の幾何学的関係を説明せよ. また, この方法を用いて, 問題 1 の (a), (b), (c) の方程式を解いてみよ. さらに, 問題 1 と同様にプログラムを実行することによって, k と $|x_k - a|$ の関係を調べ, グラフ等でわかりやすく表示せよ.

1 注意

- 事前に連絡する試問日までに印刷し, 当日持参すること.
- レポートの書き方は次の指示に従うこと.

レポートの書き方

レポートは以下の体裁で提出すること. 今回以降のレポートもこの書式に従うこと.

- 氏名, クラス, ID 番号, 課題名, 出題日, 提出日, 締切日を記入する.
- 章立て
 1. 概要 (何を解くのか, どのような結果が得られたか)
 2. プログラムの作成方針 (はじめに)
 3. プログラムおよび, その説明 (手法)
 4. プログラムの使用法 (実験)
 5. プログラムの作成過程に関する考察 (プログラムは方針通りに作成できたか)
 6. 得られた結果に関する考察, あるいは設問に対する回答 (結論, まとめ)
- 長いプログラムリストや結果出力は, タイトルをつけてレポートの最後に回し, 本文中では, タイトルで参照するだけにする.
- 結果出力が分かりにくいものや膨大なもの場合には表やグラフなどの形式で表現する.
- 図・グラフにタイトルをつける場合は図本体の下に, 表につける場合は表本体の上につける.

- グラフを書く場合には何の何に対するグラフなのか(タイトルあるいはキャプション), 軸がどこなのか, 単位は何なのか, などを忘れずに書く. 必要に応じてグラフ用紙を選択する.

この演習では,「A4 用紙片面使用」・「横書き」・「左上綴じ」とする. 他の課題のレポートを併合して提出してはいけない.

方程式の解, 補足説明

Newton 法

$x_n, f(x_n)$ を通る接線の式

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

に $y = 0$ を代入して,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を得る. $f(x) = 0$ の解を α とすると,

$$\alpha - x_{n+1} = \alpha - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

E_n を x_n における誤差とすると,

$$\begin{aligned} E_n &= \alpha - x_n \\ E_{n+1} &= E_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Taylor の定理から,

$$f(\alpha) = f(x_n) + (\alpha - x_n)f'(x_n) + (\alpha - x_n)^2 f''(C)/2 = 0$$

C は x_n と α の間の数である.

$$f(x_n) = -E_n f'(x_n) - E_n^2 f''(C)/2$$

これを, (9) に代入すると,

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n - \frac{E_n f'(x_n) + E_n^2 f''(C)/2}{f'(x_n)} \\ &= -\frac{E_n^2 f''(C)}{2f'(x_n)} \end{aligned}$$

収束する場合は, n が十分大きいとして $C\tilde{\alpha}, x_n\tilde{\alpha}$ として,

$$E_{n+1} = -\frac{E_n^2 f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = M$ と置いて,

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq (\alpha - x_n)2M/2$$

となり, 2 次収束する. ($f'(\alpha) \neq 0$ であることを仮定した.)