ニュートン法の証明(1/3)

- $f(x)=0$ の収束値を x^* とすると，ニュートン法の第kステップでの誤差 r_k は，

$$r_k = x_k - x^* \quad \text{---------} \; (1)$$

$$\therefore r_{k+1} = x_{k+1} - x^* \quad \text{---------} \; (2)$$

【テイラー展開】
変数を x とする関数 f (x) について，x + ⊿x あるいは x－⊿x というように間隔 ⊿x 移動した場合の関数値 f (x + ⊿x) を，既知の関数値 f (x) を使って近似すること．

- r_k を用いて，$f(x)$ を $x = x^*$ の周りでテイラー展開すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(x^* + r_k) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)r_k + \frac{1}{2} f''(x^*)r_k{}^2 + \mathrm{O}(r_k{}^3) \\ &\approx f'(x^*)r_k + \frac{1}{2} f''(x^*)r_k{}^2 \quad \text{---------} \; (3) \end{aligned}$$

- ここで，$f(x^*)=0$ を用いた．

ニュートン法の証明(2/3)

- 同様にして，$f'(x)$ もテイラー展開すると，

$$
\begin{aligned}
f'(x_k) &= f'(x^* + r_k) \\
&= f'(x^*) + f''(x^*) r_k + \frac{1}{2} f'''(x^*) r_k{}^2 + \mathrm{O}(r_k{}^3) \\
&\approx f'(x^*) + f''(x^*) r_k \qquad \text{--------- (4)}
\end{aligned}
$$

- ここで，ニュートン法の反復式

$$
x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{--------- (5)}
$$

の両辺から x^* を引くと，(1), (2) 式より，

$$
r_{k+1} = r_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{--------- (6)}
$$

となり，これに(3), (4) 式を代入すると，以下のようになる．

$$
r_{k+1} = r_k - \frac{f'(x^*) r_k + \frac{1}{2} f''(x_k) r_k{}^2}{f'(x^*) + f''(x^*) r_k} \qquad \text{--------- (7)}
$$

ニュートン法の証明(3/3)

- 今，収束値 x^* の十分近くでは，r_k は小さい．
  このため，分母の第2項を 0 として計算すると，(7)式は，

$$r_{k+1} = \frac{\cancel{r_k f'(x^*)} - \cancel{f'(x^*) r_k} + \frac{1}{2} f''(x_k) r_k{}^2}{f'(x^*)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} r_k{}^2 \qquad \text{---------} \ (8)$$

  となる．
- 以上より，ニュートン法は2次収束する解法である．

(証明終)

反復式の求め方

- ニュートン法の反復式

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f}{f'}\Big|_{x=x_k} \quad \text{--------- (1)}$$

- 例: $f(x) = x(x+3)(x-3)$ の反復式の求め方
  - (1)式に $f(x)$, $f'(x)$ を代入して,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 9x_k}{3x_k^2 - 9}$$

$$= \frac{3x_k^3 \cancel{-9x_k} - x_k^3 \cancel{+9x_k}}{3x_k^2 - 9}$$

$$= -\frac{2x_k^3}{3(3 - x_k^2)}$$

振動条件

- 例: $f(x) = x\,(x+3)\,(x-3)$ の x が振動，収束する場合
  - 反復式は下記の通り求めた.

$$x_{k+1} = -\frac{2{x_k}^3}{3(3-{x_k}^2)} \qquad \text{--------- (1)}$$

  - 振動条件: $x_{k+1} = -x_k$

$$-x_k = -\frac{2{x_k}^3}{3(3-{x_k}^2)}$$

$$\therefore \frac{-9x_k + 3{x_k}^3 + 2{x_k}^3}{3(3-{x_k}^2)} = \frac{x_k(5{x_k}^2-9)}{3(3-{x_k}^2)} = 0$$

  - 破綻条件:（分母）=0 となる $x = \pm\sqrt{3}$ のとき.
  - 振動条件:（分子）=0 となる $x = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$ $(x \neq 0)$ のとき.
  - 収束条件: $|x_k| < \frac{3}{\sqrt{5}}$ で 0 に収束する.